РАЗРАБОТКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА ДЛЯ 11 КЛАССА ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ. РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ»

Вилкова Светлана Александровна
учитель математики
МБОУ СОШ № 66, г. Краснодар

Для закрепления знаний и умений учащихся по теме «Производная и ее применение» в 11 классе целесообразно провести факультативный курс.

Целью курса является углубление и расширение знаний, навыков при решении нестандартных задач, развитие интереса учащихся к предмету, развитие их математических способностей, привитие интереса к самостоятельным занятиям математикой.

Формы проведения занятий: лекции, семинары и практикумы по решению задач, математические викторины, доклады, рефераты учащихся, математические сочинения,

На факультативных занятиях главной деятельностью является решение разнообразных задач, в том числе нестандартных. Одной из важнейших задач факультатива является подготовка выпускников к ЕГЭ.

На каждом занятии излагается теоретический материал.

Факультативный курс рассчитан на 6 - 8 часов, его можно реализовать в течение 1 учебной четверти.

Программа курса

Занятие № 1. Тема «Производная и касательная».

Занятие № 2. Тема «Задачи на максимум и минимум».

Занятие № 3. Тема «Применение производной для доказательства тождеств и неравенств».

Занятие № 4. Тема «Использование производной при решении различных задач».

Занятие № 1. Тема «Производная и касательная».

В школьной практике мы встречаемся в основном с «хорошими» функциями, то есть с такими функциями, графики которых имеют касательную к каждой точке, за исключением, быть может, конечного числа точек.(В математике линия, имеющая в каждой точке касательную, называется гладкой.)

Обычно по отношению к касательной дуга рассматриваемой кривой в некоторой окрестности точки $(x0; y0)$ располагается одним из трех способов, указанных на рисунке 1. (В принципе возможны и более сложные ситуации, однако, они в школьной практике не встречаются.) В первом случае дуга расположена под касательной, функция выпукла вверх (или выпукла); во втором - дуга над касательной, функция выпукла вниз (или вогнута); в третьем происходит переход (перегиб) дуги с одной стороны касательной на другую, М $(xo; y0)$ -точка перегиба.

В качестве критерия выпуклости и вогнутости можно использовать вторую производную функции (производную от производной). Так, если вторая производная положительна, то первая возрастает, т.е. возрастает угол наклона касательной (рис. 2 а), функция выпукла вниз (вогнута); если вторая производная отрицательна, функция выпукла вверх (рис. 2 б). Точки перегиба характеризуются изменением знака второй производной.

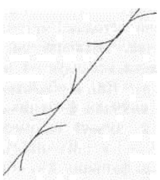

Рис 1.

Рис. 2 а

Рис. 2 б

Рассмотрим примеры задач по теме «Производная и касательная ».

Задача 1. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x3 — 3x2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции.

Решение. Пусть искомая касательная касается заданной функции в точке с абсциссой t, т.е. ее уравнение имеет вид

$y = t^3 - 3t^2 + (3t^2 - 6t)(x-1) = (3t^2 — 6t)x - 2t^3 + 3t^2.$

Эта прямая пересекается с графиком функции $y = x^3 – 3x^2$

в единственной точке, абсцисса которой равна t (по условию).

Значит, уравнение $x^3 - 3x^2 = (3t^2 - 6t)x - 2 t^3 + 3t^2$ имеет единственное решение

$x = t.$

x3 — 3x2 — 3t2 x+ 6tx + 213 — 3? = 0

Перенесем все в левую часть и разложим на множители:

$$x3- 3x2-3t2x+6tx+2t3-3t2=0$$

$$x^3 + 2x^2t- 3x^2) —2x^2t- 4xt^2+ 6xt + t^2x + 2t^3\ 3t^2 = 0,$$

$$(x^3 + 2x^2t - 3x^2) -(2x^2t + 4xt^2 - 6xt)+ (t^2x + 2t^3 – 3t) = 0,$$

$$x^2 (x+ 2t - 3) -2xt (x+ 2t— 3) +t^2 (x + 2t - 3)= 0,$$

$$(x^2 - 2xt +t^2)(x + 2t- 3) = 0,$$

$$(x — t)^2(x + 2t —3) \sim 0,$$

$$x = t \textit{ или } (x + 2t — 3) = 0.$$

Следовательно, t =1*и* $y = (3t^2 — 6t) x — 2 t^3 + 3t^2 = — 3x + 1.$

Ответ: уравнение искомой касательной имеет вид y = - *3x + 1.*

Замечание. Искомая касательная есть не что иное, как касательная, проходящая через точку перегиба. С точки зрения наглядно-графических представлений подобный результат достаточно очевиден

Задача 2. На графике функции y = sinx взяты точки A и B с абсциссами $\pi/6$ и $\pi/2$. Пусть M - некоторая точка дуги AB. Чему равно наибольшее значение площади треугольника AMB?

Занятие № 2. «Задачи на максимум и минимум».

Одной из важнейших областей приложения понятия производной (и всего раздела математического анализа, называемого дифференциальным исчислением) являются экстремальные задачи.

Общая схема решения экстремальной задачи методами математического анализа достаточно известна. Напомним ее. Выбирается параметр (переменная) *x,* через который удобно выражается исследуемая величина *y.* Находится функция, выражающая *y* через x, т.е. y = f(x), и область изменения параметра (переменной) *x*.(В более простых случаях функция у = f(x) и область изменения *x*задаются.) В большинстве случаев мы имеем задачу: найти наибольшее (наименьшее) значение функции у = f(x) на отрезке [а; Ь] (или на заданном луче, или на всей прямой), где функция f(x) определена и имеет производную в любой внутренней точке этого отрезка. Далее находим точки на рассматриваемом отрезке, в которых производная обращается в нуль (критические точки). Исследуем их на максимум - минимум. После чего находим нужное - наибольшее или наименьшее - значение, которое достигается или в одной из критических точек, или на границе области изменения *x*.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Отрезок с концами на сторонах прямого угла содержит внутри себя точку, удаленную на расстояния 1 и 8 от сторон этого угла. Найти наименьшую длину таких отрезков.

Задача 2. Из круга радиусом Rвырезан сектор и из сектора склеен конус (боковая поверхность конуса). Каков наибольший объем получившейся конической воронки?

Задача 3. Два корабля движутся по двум перпендикулярным прямым, пересекающимися в точке А, по направлению к А. В какой-то момент времени оба находятся и 65 км от А, скорость первого равна 15 км/ч, второго - 20 км/ч. За какое наименьше *время катер* может доплыть от первого корабля до второго?

Решение: Пусть катер отправляется через *x* часов от момента, когда оба корабля находились в 65 км от А и были в пути Т часов, т.е. в момент отправления катера первый корабль находится на расстоянии *(65 - 15x)* от А,в момент прибытия катера второй корабль находится на расстоянии
65 - 20(x + T) от А, а путь катера *25T* км, имеем уравнение:

$$(65 - 15x)^2 + (65 - 20(x + T))^2 = (25T)^2,$$

или после упрощения:

$$25x^2 + 32Tx - 9T^2 - 182x - 104T + 338 = 0.$$

Возьмем производную по x от обеих частей полученного уравнения, считая $T = T(x)$, и положим $T = 0$ (ищем наименьшее значение).

$$50x + 32T - 182 = 0.$$

Получим $25x + 16T = 91$. Решив полученную систему, найдем $x = 3$, $T = 1$. Найденное значение $T = 1$ не может не быть ничем иным, как наименьшим значением T, поскольку такое наименьшее T существует, а при $x = 0$ соответствующее $T > 1$.

Так можно решить задачу при помощи производной. Однако можно обойтись и без методов анализа. Соотношение (1) можно рассматривать как квадратное относительно x. Его дискриминант (зависящий от T) должен быть неотрицательным. Получаем для T неравенство $481T^2 — 312T - 169 > 0$, откуда $T \geq 0$.

Ответ: наименьшее время - 1 час.

Занятие № 3.

«Применение производной для доказательства тождеств и неравенств».

Для доказательства тождеств оказывается полезной следующая теорема.

Теорема. Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; Ь] и во всех внутренних точках отрезка ее производная равна нулю, то функция y = f(x) постоянна на этом отрезке.

Утверждение имеет простой физический смысл: если скорость точки все время равна 0, то точка покоится, ее координата не меняется (постоянна).

Задача 1. Докажем, что arcsinx = π/2 - arccosx.

Решение. Обозначим функцию, стоящую в левой части равенства, через f*(x)*, а функцию, стоящую в правой части равенства, через *g(к):* f*(x) = arcsinx*, а *g (x)* = л/2 - *arccosx*. Обе функции определены и непрерывны на отрезке [-1,1]. Найдем производные этих функций: эти производные определены во всех внутренних точках отрезка [-1,1]. Так как производные $g'(x)$ и $f'(x)$ равны, а $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$, то $(f(x) - g(x))' = 0$, следовательно, $f(x) - g(x) = C$ или $arcsinx - (\pi/2 - arccosx) = C$.

Полученное равенство справедливо при любом значении x из отрезка [-1,11.

Чтобы найти значение постоянной С, достаточно в полученное равенство подставить любое значение x из отрезка [-1,1]. Подставляя $x = 0,$ получаем $arcsin0 - (\pi/2 - arccos0) = C$, то есть $0 - (\pi/2 - \pi/2) = C$, следовательно, $C = 0,$ а значит, $arcsinx = \pi/2 - arccosx,$ что и требовалось доказать.

Для доказательства неравенств используются такие свойства функций, как возрастание, убывание, выпуклость вверх, выпуклость вниз.

Задача 2. Докажем, что для всех $x \geq 0$ справедливо неравенство $e^x \geq 1 + x$

Решение. Составим вспомогательную функцию $g(x) = e^x — (1 + x)$ и найдем ее производную $g'(x) = e^x - 1$. Так как при $x \geq 0$ выполняется неравенство $e^x — 1 \geq 0$, примем равенство возможно лишь в случае $x = 0,$ то функция $g(x)$ возрастает на луче $[0; \infty)$.

В частности, выполняется неравенство $g(x) > g(0)$.

Но $g(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$. Значит $g(x) \geq 0$, т.е. $e^x - (1 + x) \geq 0$. Таким образом, $e^x \geq 1 + x$, что и требовалось доказать.

Занятие № 4.

«Использование производной при решении различных задач».

Экстремальные задачи далеко не единственные, где можно использовать производную. Приведем еще несколько примеров. Производная может быть с успехом использована при доказательстве различных неравенств. Так, для того чтобы доказать неравенство $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, достаточно доказать, что $f(0) \geq 0$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. А для того чтобы доказать неравенство $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, можно воспользоваться второй производной ($f'(x) \geq 0$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \geq 0$) и так далее.

Задача 1. Доказать, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство

$sinx \geq x - (1/6) x^3$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = sinx — x + (1/6) x^3$. Имеем $f(0) = 0,$

$\{'(x) = cosx - 1 + (1/2) x^2, f'(0) = 0, f''(x) = - sinx + x$

Но sinx ≤ x*при* x ≥*0*,значит, $f''(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. Теперь возвращаемся к $f(x)$; $f'(x) \geq 0$, а затем и $f(x) \geq 0$. Можно было бы не останавливаться на $f''(x)$, *я*пойти дальше:

$f''(x)= 0$

$f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0.$

Последнее неравенство очевидно.

С помощью производной можно производить также оценку числа корней того или иного уравнения. Один из возможных приемов основывается на следующей теореме: если функция имеет в каждой точке отрезка производную, то между любыми двумя корнями этой функции, расположенными на отрезке, имеется хотя бы один корень ее производной.

Задача 2. Доказать, что уравнение $e^x = ax^2 + bx + c$ может иметь не более трех различных решений.

Решение. Рассмотрим функцию f (x) = ex- ax2- bx- c.Предположим, эта функция имеет четыре различных корпя. Поскольку f (x)имеет производную всюду, то f'(x) должна иметь не менее трех различных корней (по одному между любыми двумя корнями f (x)),то есть f '(x)= ex - 2ax- bобращается в нуль не менее трех раз. Тогда f "(x) = ex- 2аимеет не более двух нулей, а f "(x)= ex имеет по крайней мере один нуль. Получаем противоречие.

Очень мощное средство для доказательства различных числовых и функциональных неравенств дает нам понятие выпуклости функции.

Задача 3. Найти приближенное значение для tg (π/4+ 0,01).

Решение. Воспользуемся формулой f(a + h)~ f(a)+f /(a)h.

В нашем случаеf(x) = tg x,f '(x) = 1 / cos2 x, a = π/4 , h = 0,01.

Поэтому tg (π/4 + 0,01) ~(tg π/4) + 0,01/(cos2 π/4) = 1. 02.

Ответ: tg (π/4 + 0,01) ~ 1, 02.

Задача 4. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, высота которой в 1,5 раза меньше высоты основания. Между боковой гранью пирамиды из сферы расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найти этот объем.

Иногда вопрос о монотонности, об ограниченности, нахождение наименьшего и наибольшего значений существенно упрощается при применении производной.

Задача 5. Решить неравенство $20x^7 + 28x^5 + 210x - \sin(2x) > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 20x^7 + 28x^5 + 210x - \sin(2x)$. Так как эта функция на R имеет производную $f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 2\cos(2x)$, которая положительна на этом промежутке, то функция f(x) возрастает на R и потому принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Итак, соответствующее уравнение может иметь не более одного корня.

Нетрудно заметить, что таким корнем является $x = 0$. Поскольку функция f(x) определена на всей прямой и непрерывна на ней, то для $x < 0$ имеем $f(x) < a$, а при $x > 0$ имеем $f(x)>0$. Поэтому решениями исходного неравенства являются все x из промежутка $(0; \infty)$.

Ответ: $(0;\infty)$.

Предлагаемый факультативный курс «Производная и ее применение» позволяет решить следующие проблемы:

- повысить уровень теоретической подготовки учащихся за счет углубления и расширения знаний и умений при решении нестандартных задач,
- увеличить творческий потенциал учащихся путем развития их математических способностей и формирования устойчивого интереса к математике

Литература

1. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа 10-11. Учебное пособие для углубленного изучения математики. М.: Просвещение, 1995.
2. Кушнир И. Неравенства. Задачи и решения. - Киев: Астарта, 1996
3. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс. М.: Просвещение, 1989.
4. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс. М.: Просвещение, 1991